V5-09: Extensão para os Harmônicos Esféricos

SINOPSE

Pontos Centrais:

O ponto central é a extensão do formalismo para o caso esférico mais geral, com dependências angulares tanto em θ quanto em ϕ.

Tópicos Essenciais:

Equação de Laplace completa, com dependências em ϕ; revisão da separação de variáveis e das equações que definem cada parte da base.

Solução da equação harmônica em ϕ, levando aos elementos da já familiar base e Fourier.

Equação geral em θ, para $P_n^m(\chi)$, onde $\chi = \cos(\theta)$; interpretação em termos de autofunções de um operador diferencial no caso $m = 0$.

Mudança de variáveis na equação, com o objetivo de separar a parte polinomial $Q_n^m(\chi)$ das soluções.

Equação geral para $Q_n^m(\chi)$, interpretação em termos de autofunções de um operador diferencial com $m \geq 0$.

Estabelecimento do operador ∂_χ como um operador-escadinha (ladder operator) relativo ao índice m.

Estabelecimento da solução geral para $Q_n^m(\chi)$, e consequentemente da solução geral para $P_n^m(\chi)$.

Estabelecimento das relações e limitações existentes entre os valores de m e de n; interpretação geométrica destas limitações.

Estabelecimento das soluções completas para os elementos da base; extensão das soluções para valores negativos de m; forma complexa dos elementos da base.

Harmônicos de superfície e harmônicos esféricos; casos de condução estacionária de calor e de relaxamento térmico; comentários sobre normalização e ortogonalidade.