V1-12: Representação de Funções por Séries

SINOPSE

Pontos Centrais:

Um ponto central é estabelecer as séries de potências como representações algorítmicas completas e fiéis das funções analíticas, para todas as operações que se pode conceber com uma ou outra destas duas entidades.

Outro ponto central é estabelecer a bijeção entre funções analíticas e séries de potências, levando a uma interpretação em termos de espaços vetoriais, envolvendo a ideia de expansão em uma base.

Tópicos Essenciais:

Série de Taylor como representação algorítmica; as questões de fidelidade e de completeza da representação.

Exame da questão nos casos da soma, do produto e da da razão de duas séries, bem como da derivada e da integral de uma série.

Constatação da convergência uniforme das séries, bem como da representação fiel das funções pelas séries.

Relação de funções com séries e o exame do problema inverso: a cada função corresponde uma única série de potências em relação a um ponto de referência dado, e a cada série de potências em relação àquele ponto, que seja convergente, corresponde uma única função analítica.

Papel da convergência uniforme e discussão dos teoremas básicos sobre a convergência de séries de potências, sem demonstração: uma série de potências convergente é sempre absoluta e uniformemente convergente dentro de um disco.

Aplicação dos teoremas para estabelecer a analiticidade das séries de potência convergentes; verificação de que trata-se de fato da série de Taylor da função.

Extensão da convergência ao disco máximo e demonstração de divergência fora do disco.

Interpretação de toda a estrutura em termos de espaços vetoriais de dimensão infinita.

Demonstrações:

Demonstração de que a soma de duas séries de Taylor é a série de Taylor da função-soma.

Demonstração parcial de que o produto de duas séries de Taylor é a série de Taylor da função-produto.

Demonstração de que a derivada de uma série de Taylor é a série de Taylor da derivada da função.

Demonstração de que a primitiva de uma série de Taylor é a série de Taylor da primitiva da função.

Demonstração de que uma série de potências convergente converge para uma função analítica.

Demonstração da unicidade da série de Taylor em torno de um ponto de referência dado.