Formulário de Física Matemática

Observação: este é um formulário de uso geral, que é distribuído junto com as provas; a inclusão de uma fórmula neste formulário não significa que ela necessariamente seja útil para algum dos problemas da prova.

Cálculo Complexo

- Estas são as duas condições de Cauchy-Riemann para uma função complexa $w(z) = u(x, y) + \imath\, v(x, y)$ de uma variável complexa $z = x + \imath\, y$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}. \end{aligned}$$

- Este é o teorema de Cauchy-Goursat: se uma função complexa $w(z)$ é analítica no interior e na borda de uma região S do plano (x, y), então é verdade que, na curva $C = \partial S$ que é a borda de S,

$$\oint_C w(z)\, dz = 0.$$

- Esta é a série de Taylor de uma função analítica $f(z)$, em relação a um ponto z_0:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n\prime}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n.$$

- Este é o teorema de resíduos: se uma função analítica $f(z)$ tem n polos no interior de uma curva C do plano (x, y), cujos resíduos são $b_{1,j}$, para $j = 1, \ldots, n$, então é verdade que temos, para a integral da função sobre a curva,

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi\imath \sum_{j=1}^{n} b_{1,j}.$$

- Esta é a definição de resíduo da função $f(z)$ no ponto singular z_0: o resíduo b_1 é o coeficiente do termo com a potência $(z - z_0)^{-1}$ da série de Laurent da função $f(z)$, desenvolvida em torno do ponto z_0. Para polos simples ele pode ser calculado como o limite

$$b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

- Esta é a definição das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico em termos da exponencial real:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

- Alguns valores úteis da função $\zeta(s)$ de Riemann:

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \frac{\pi^2}{2\times 3}, \\
\zeta(4) &= \frac{\pi^4}{2\times 3^2\times 5}, \\
\zeta(6) &= \frac{\pi^6}{3^3\times 5\times 7}, \\
\zeta(8) &= \frac{\pi^8}{2\times 3^3\times 5^2\times 7}.
\end{aligned}$$

Transformadas de Fourier

- As relações relevantes para a série de Fourier unidimensional de uma função real $\varphi(x)$ no intervalo real $[-L/2, L/2]$, para condições de contorno periódicas, são

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(2\pi \frac{kx}{L}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\left(2\pi \frac{kx}{L}\right), \\
\alpha_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \cos\left(2\pi \frac{kx}{L}\right) \varphi(x), \\
\beta_k &= \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} dx\, \sin\left(2\pi \frac{kx}{L}\right) \varphi(x).
\end{aligned}$$

- As relações relevantes para a série de Fourier unidimensional de uma função real $\varphi(x)$ no intervalo real $[0, L]$, para condições de contorno nulas de Dirichlet, são

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right), \\
\beta_k &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} dx\, \sin\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \varphi(x).
\end{aligned}$$

- As relações relevantes para a série de Fourier unidimensional de uma função real $\varphi(x)$ no intervalo real $[0, L]$, para condições de contorno nulas de Neumann, são

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos\left(\pi \frac{kx}{L}\right), \\
\alpha_k &= \frac{2}{L}\int_{0}^{L} dx\, \cos\left(\pi \frac{kx}{L}\right) \varphi(x).
\end{aligned}$$

- As relações relevantes para a série de Fourier bidimensional de uma função real $\varphi(x, y)$ com x no intervalo real $[0, L_1]$ e y no intervalo real $[0, L_2]$, para condições de contorno nulas de Dirichlet, são

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y) &= \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=1}^{\infty}\beta_{k_1k_2}\sin\left(\pi\frac{k_1x}{L_1}\right)\sin\left(\pi\frac{k_2y}{L_2}\right),\\
\beta_{k_1k_2} &= \frac{2}{L_1}\frac{2}{L_2}\int_0^{L_1}dx\int_0^{L_2}dy\,\sin\left(\pi\frac{k_1x}{L_1}\right)\sin\left(\pi\frac{k_2y}{L_2}\right)\varphi(x,y).
\end{aligned}
$$

- As relações relevantes para a transformada de Fourier unidimensional de uma função real $\varphi(x)$ com x na reta real são

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dp\,e^{\imath\,px}\widetilde{\varphi}(p),\\
\widetilde{\varphi}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-\imath\,px}\varphi(x),\\
\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{\imath\,px}\,e^{-\imath\,p'x} &= 2\pi\delta(p-p').
\end{aligned}
$$

Equações Diferenciais

- A equação de ondas para uma função f é dada por

$$\nabla^2 f-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}f=0.$$

- A equação de difusão para uma função f é dada por

$$\nabla^2 f-\frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t}f=0.$$

- O gradiente pode ser escrito em coordenadas cilíndricas (r,θ,z) como

$$\vec{\nabla}=\hat{r}\,\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{z}\,\frac{\partial}{\partial z}.$$

- O gradiente pode ser escrito em coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) como

$$\vec{\nabla}=\hat{r}\,\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\phi}\,\frac{1}{r\sin(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\phi}.$$

- O Laplaciano pode ser escrito em coordenadas cilíndricas (r,θ,z) como

$$\nabla^2=\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

- O Laplaciano pode ser escrito em coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) como

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

Funções de Bessel

- A equação de Bessel esférica, satisfeita pelas funções de Bessel esféricas $j_n(\xi)$, com $\xi = \lambda r$, é dada por

$$\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} j_n(\xi) + 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} j_n(\xi) + \left[\xi^2 - n(n+1)\right] j_n(\xi) = 0.$$

- As fórmulas para a derivada de uma função de Bessel esférica são

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} j_n(\xi) &= \xi j_{n-1}(\xi) - (n+1) j_n(\xi), \\ \xi \frac{\partial}{\partial \xi} j_n(\xi) &= -\xi j_{n+1}(\xi) + n j_n(\xi), \\ 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} j_n(\xi) &= \xi[j_{n-1}(\xi) - j_{n+1}(\xi)] - j_n(\xi). \end{aligned}$$

- A fórmula de recorrência para as funções de Bessel esféricas é dada por

$$(2n+1) j_n(\xi) = \xi[j_{n-1}(\xi) + j_{n+1}(\xi)].$$

- As funções de Bessel esféricas de ordem zero podem ser escritas em termos de funções elementares como

$$j_0(\xi) = \frac{\sin(\xi)}{\xi}, \qquad y_0(\xi) = -\frac{\cos(\xi)}{\xi}.$$

- As fórmulas de Rodrigues ou Rayleigh para as funções de Bessel esféricas são dadas por

$$\begin{aligned} j_n(\xi) &= (-1)^n \xi^n \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n j_0(\xi), \\ y_n(\xi) &= (-1)^n \xi^n \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^n y_0(\xi). \end{aligned}$$

- A relação de ortogonalidade das funções de Bessel esféricas, para um dado valor de n, é dada por

$$\int_0^{r_0} dr\, r^2\, j_n(\lambda_{k_1} r) j_n(\lambda_{k_2} r) = \frac{r_0^3}{2} \left[j_{n+1}(\lambda_{k_1} r_0)\right]^2 \delta_{k_1 k_2},$$

onde as constantes λ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ são definidas por

$$j_n(\lambda_k r_0) = 0.$$

- Uma função de r suficientemente bem comportada no intervalo $[0, r_0]$ pode ser expandida como uma série de Fourier-Bessel na base das funções de Bessel esféricas $j_n(\xi)$, para um determinado valor de n, como

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, j_n(\lambda_k r).$$

- A equação de Bessel cilíndrica, satisfeita pelas funções de Bessel cilíndricas $J_n(\xi)$, com $\xi = \lambda r$, é dada por

$$\xi^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} J_n(\xi) + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} J_n(\xi) + \left(\xi^2 - n^2\right) J_n(\xi) = 0.$$

- As fórmulas para a derivada de uma função de Bessel cilíndrica são

$$\begin{aligned}
\xi \frac{\partial}{\partial \xi} J_n(\xi) &= \xi J_{n-1}(\xi) - n J_n(\xi), \\
\xi \frac{\partial}{\partial \xi} J_n(\xi) &= -\xi J_{n+1}(\xi) + n J_n(\xi), \\
2 \frac{\partial}{\partial \xi} J_n(\xi) &= J_{n-1}(\xi) - J_{n+1}(\xi).
\end{aligned}$$

- A fórmula de recorrência para as funções de Bessel cilíndricas é dada por

$$2n J_n(\xi) = \xi [J_{n-1}(\xi) + J_{n+1}(\xi)].$$

- As fórmulas de Rodrigues para as funções de Bessel cilíndricas são dadas por

$$\begin{aligned}
J_n(\xi) &= (-1)^n \xi^n \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n J_0(\xi), \\
Y_n(\xi) &= (-1)^n \xi^n \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n Y_0(\xi).
\end{aligned}$$

- A função geratriz para as funções de Bessel cilíndricas é dada por

$$\begin{aligned}
e^{\imath \xi \cos(\theta)} &= J_0(\xi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \imath^n J_n(\xi) \cos(n\theta) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \imath^n J_n(\xi)\, e^{\imath n\theta},
\end{aligned}$$

  ou, alternativamente, por

$$e^{\frac{1}{2}(t-1/t)\xi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(\xi).$$

- A relação de ortogonalidade das funções de Bessel cilíndricas, para um dado valor de n, é dada por

$$\int_0^{r_0} dr\, r\, J_n(\lambda_{k_1} r) J_n(\lambda_{k_2} r) = \frac{r_0^2}{2} \left[J_{n+1}(\lambda_{k_1} r_0)\right]^2 \delta_{k_1 k_2},$$

  onde as constantes λ_k, $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$ são definidas por

$$J_n(\lambda_k r_0) = 0.$$

- As seguintes relações valem para as funções de Bessel cilíndricas indicadas:

$$\begin{aligned}
\xi J_0(\xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi}[\xi J_1(\xi)], \\
\frac{\partial}{\partial \xi} J_0(\xi) &= -J_1(\xi), \\
|J_n(\xi)| &\sim \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}}, \text{ para } \xi \to \infty, \\
\xi_{k+1} - \xi_k &\approx \pi, \text{ para } k \to \infty,
\end{aligned}$$

  onde $\xi_k = \lambda_k r_0$ são zeros de uma função de Bessel.

- Uma função de r suficientemente bem comportada no intervalo $[0, r_0]$ pode ser expandida como uma série de Fourier-Bessel na base das funções de Bessel cilíndricas $J_n(\xi)$, para um determinado valor de n, como

$$f(r) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, J_n(\lambda_k r).$$

- Algumas relações entre as diversas funções de Bessel cilíndricas:

$$\begin{aligned}
I_n(\xi) &= \imath^{-n} J_n(\imath \xi), \\
K_n(\xi) &= \frac{\pi}{2} \imath^{n+1} \left[J_n(\imath \xi) + \imath Y_n(\imath \xi)\right], \\
H_n^{(1)}(\xi) &= J_n(\xi) + \imath Y_n(\xi), \\
K_n(\xi) &= \frac{\pi}{2} \imath^{n+1} H_n^{(1)}(\imath \xi), \\
H_n^{(2)}(\xi) &= J_n(\xi) - \imath Y_n(\xi).
\end{aligned}$$

- Algumas relações envolvendo os zeros ξ_{nk} das funções de Bessel cilíndricas $J_n(\xi)$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_{nk}^2} = \frac{1}{4(n+1)}.$$

Harmônicos Esféricos

- A equação de Legendre, satisfeita pelos polinômios de Legendre $P_n(\chi)$, com $\chi = \cos\theta$, é dada por

$$\left(1 - \chi^2\right) \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} P_n(\chi) - 2\chi \frac{\partial}{\partial \chi} P_n(\chi) + n(n+1) P_n(\chi) = 0.$$

- A fórmula envolvendo duas derivadas dos polinômios de Legendre é

$$(2n+1) P_n(\chi) = \frac{\partial}{\partial \chi} P_{n+1}(\chi) - \frac{\partial}{\partial \chi} P_{n-1}(\chi).$$

- As fórmulas para a derivada de um polinômio de Legendre são

$$
\begin{aligned}
\left(1-\chi^2\right)\frac{\partial}{\partial\chi}P_n(\chi) &= -\frac{n(n+1)}{2n+1}\left[P_{n+1}(\chi)-P_{n-1}(\chi)\right]\\
\left(1-\chi^2\right)\frac{\partial}{\partial\chi}P_n(\chi) &= -(n+1)\left[P_{n+1}(\chi)-\chi P_n(\chi)\right]\\
\left(1-\chi^2\right)\frac{\partial}{\partial\chi}P_n(\chi) &= -n\left[\chi P_n(\chi)-P_{n-1}(\chi)\right].
\end{aligned}
$$

- A fórmula de recorrência para os polinômios de Legendre é dada por

$$(n+1)P_{n+1}(\chi)-(2n+1)\chi P_n(\chi)+nP_{n-1}(\chi)=0,$$

que vale para $n\geq 1$.

- A fórmula de Rodrigues para os polinômios de Legendre é dada por

$$P_n(\chi)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\partial^n}{\partial\chi^n}\left(\chi^2-1\right)^n.$$

- A função geratriz para os polinômios de Legendre é dada por

$$\Psi(t,\chi)=\frac{1}{\sqrt{t^2-2t\chi+1}}.$$

- A relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre é dada por

$$\int_{-1}^{1}d\chi\,P_{n_1}(\chi)P_{n_2}(\chi)=\frac{2}{2n_1+1}\,\delta_{n_1n_2}.$$

- Uma função de χ suficientemente bem comportada no intervalo $[-1,1]$ pode ser expandida como uma série de Fourier-Legendre na base dos polinômios de Legendre, como

$$f(\chi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,P_n(\chi).$$

- Os primeiros sete polinômios de Legendre são dados por

$$
\begin{aligned}
P_0(\chi) &= 1,\\
P_1(\chi) &= \chi,\\
P_2(\chi) &= \frac{1}{2}\left(3\chi^2-1\right),\\
P_3(\chi) &= \frac{1}{2}\left(5\chi^3-3\chi\right),\\
P_4(\chi) &= \frac{1}{8}\left(35\chi^4-30\chi^2+3\right),\\
P_5(\chi) &= \frac{1}{8}\left(63\chi^5-70\chi^3+15\chi\right),\\
P_6(\chi) &= \frac{1}{16}\left(231\chi^6-315\chi^4+105\chi^2-5\right).
\end{aligned}
$$

- As primeiras seis potências são dadas em termos dos polinômios de Legendre por

$$
\begin{aligned}
\chi^0 &= P_0(\chi), \\
\chi^1 &= P_1(\chi), \\
\chi^2 &= \frac{2}{3}P_2(\chi) + \frac{1}{3}P_0(\chi), \\
\chi^3 &= \frac{2}{5}P_3(\chi) + \frac{3}{5}P_1(\chi), \\
\chi^4 &= \frac{8}{35}P_4(\chi) + \frac{4}{7}P_2(\chi) + \frac{1}{5}P_0(\chi), \\
\chi^5 &= \frac{8}{63}P_5(\chi) + \frac{4}{9}P_3(\chi) + \frac{3}{7}P_1(\chi).
\end{aligned}
$$